线性系统理论补充 1：状态空间标准型

一、可控标准型的一般形式推导

对于一单输入单输出的传递函数

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}+d \tag{1}$$

将上式改写成

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}U(s)+dU(s)\\&=(b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0)\frac{U(s)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}+dU(s)\end{aligned} \tag{2}$$

定义

$$X(s)=\frac{U(s)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} \tag{3}$$

则 (2) 可写为

$$Y(s)=(b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0)X(s)+dU(s) \tag{4}$$

现在来考虑 (3)。将其化为

$$(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)X(s)=U(s)$$

作拉氏反变换得

$$x^{(n)}(t)+a_{n-1}x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{x}(t)+a_0x(t)=u(t) \tag{5}$$

定义状态变量

$$x_1=x(t),x_2=\dot{x}(t),\ldots,x_n=x^{(n-1)}(t)$$

则各状态变量导数是

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\dot{x}(t)=x_2\\\dot{x}_2&=x^{(2)}(t)=x_3\\&\vdots\\\dot{x}_{n-1}&=x^{(n-1)}(t)=x_n\\\dot{x}_n&=x^{(n)}(t)=u(t)-a_0x(t)-a_1\dot{x}(t)-\cdots-a_{n-1}x^{(n-1)}(t)\\&=u(t)-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n\end{aligned} \tag{6}$$

其中 (6) 源于 (5)。将上面式子组合成矩阵形式即为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ & \vdots & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b} u \tag{7}$$

这就是系统的状态方程。

现在来考虑 (4)。同样作拉氏反变换得

$$y(t) = b_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1\dot{x}(t) + b_0x(t) + du(t)$$

利用上面定义的状态将其改写成

$$y(t) = b_{n-1}x_n + \cdots + b_1x_2 + b_0x_1 + du(t)$$

写成矩阵形式就是

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}}_{c} \mathbf{x} + [d]u \tag{8}$$

这就是系统的输出方程。(7) 与 (8) 共同构成了系统的状态空间描述。

二、有共轭复数极点的系统之实现

考虑传递函数

$$G(s) = \frac{as+b}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

其中各系数均为实数。考虑将其按两个单极点进行部分分式展开

$$G(s) = \frac{k_1}{s-(\sigma+\mathrm{j}\omega)} + \frac{k_2}{s-(\sigma-\mathrm{j}\omega)}$$

k_1, k_2 两个系数均为复数，需要满足

$$\begin{cases} a = k_1 + k_2 = (\operatorname{Re}k_1 + \operatorname{Re}k_2) + \mathrm{j}(\operatorname{Im}k_1 + \operatorname{Im}k_2) \\ b = -k_1(\sigma-\mathrm{j}\omega) - k_2(\sigma+\mathrm{j}\omega) \end{cases}$$

由 $a \in \mathbf{R}$，可知 $\operatorname{Im}k_1 + \operatorname{Im}k_2 = 0$，即 $k_2 = k_1^*$（互为复共轭）。令 $k_1 = k$，上式改写成

$$\begin{cases} a & = 2\operatorname{Re}k \\ b & = -k(\sigma-\mathrm{j}\omega) - k^*(\sigma+\mathrm{j}\omega) = -k(\sigma-\mathrm{j}\omega) - (k(\sigma-\mathrm{j}\omega))^* \\ & = -2\operatorname{Re}(k(\sigma-\mathrm{j}\omega)) = -2(\operatorname{Re}k\cdot\sigma + \operatorname{Im}k\cdot\omega) \end{cases}$$

将上面第一式代入第二式，再整理得

$$\begin{cases}\operatorname{Re}k = \frac{1}{2}a \\ \operatorname{Im}k = -\frac{1}{2}\frac{a\sigma+b}{\omega}\end{cases}$$

则

$$G(s) = \frac{\frac{1}{2}\left(a - \mathrm{j}\frac{a\sigma+b}{\omega}\right)}{s-(\sigma+\mathrm{j}\omega)} + \frac{\frac{1}{2}\left(a + \mathrm{j}\frac{a\sigma+b}{\omega}\right)}{s-(\sigma-\mathrm{j}\omega)}$$

即

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{2}\left(a - \mathrm{j}\frac{a\sigma+b}{\omega}\right)}{s-(\sigma+\mathrm{j}\omega)}U(s) + \frac{\frac{1}{2}\left(a + \mathrm{j}\frac{a\sigma+b}{\omega}\right)}{s-(\sigma-\mathrm{j}\omega)}U(s)$$

令

$$Z_1(s) = \frac{1}{2}\frac{U(s)}{s-(\sigma+\mathrm{j}\omega)}, Z_2(s) = \frac{1}{2}\frac{U(s)}{s-(\sigma-\mathrm{j}\omega)}$$

则可写出状态空间实现为（提出 $\frac{1}{2}$ 是为了最终的形式简单起见，没有本质影响）

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix}\dot{z}_1 \\ \dot{z}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\sigma+\mathrm{j}\omega & 0 \\ 0 & \sigma-\mathrm{j}\omega\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}1/2 \\ 1/2\end{bmatrix}}_{b}u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix}a - \mathrm{j}\frac{a\sigma+b}{\omega} & a + \mathrm{j}\frac{a\sigma+b}{\omega}\end{bmatrix}}_{c}\mathbf{z}$$

矩阵中含有复数值。为将其变为实数，考虑使用变换矩阵。

观察 y 的形式，会发现 y 等于一个系数乘以一个状态变量，再加上同一个系数的共轭乘以另一个状态变量。因为 y 是实的，可以认为两个状态变量是“共轭”的。从状态方程中，两个状态相应于共轭的特征根也可以感受到这一点。y 的现有形式，其实等于系数的实部乘以状态变量的“实部”加上系数的虚部乘以状态变量的“虚部”（的两倍）。如果能写成这样的形式，那么系数就都是实的了。因此，为了提取两个状态变量的“实部”和“虚部”，可以令新状态是

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1 + z_2 \\ x_2 &= \mathrm{j}(z_1 - z_2)\end{aligned}$$

那么变换就是

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ \mathrm{j} & -\mathrm{j}\end{bmatrix}\mathbf{z}$$

将变换矩阵记为 P 并作用于原系统得到

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ \mathrm{j} & -\mathrm{j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma+\mathrm{j}\omega & 0 \\ 0 & \sigma-\mathrm{j}\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\mathrm{j} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\mathrm{j}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma+\mathrm{j}\omega & \sigma-\mathrm{j}\omega \\ \sigma\mathrm{j}-\omega & -\sigma\mathrm{j}-\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\mathrm{j} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\mathrm{j}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma & \omega \\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = Pb = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ \mathrm{j} & -\mathrm{j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 \\ 1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = cP^{-1} = \begin{bmatrix}a - \mathrm{j}\frac{a\sigma+b}{\omega} & a + \mathrm{j}\frac{a\sigma+b}{\omega}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\mathrm{j} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\mathrm{j}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & -\frac{a\sigma+b}{\omega}\end{bmatrix}$$

这样各矩阵就都是实矩阵了，便于分析。注意到 $\bar{c}$（记录了两个状态加权得到 y 的系数）的确由原来系数的实部和虚部构成。

当然状态的变换还有别的取法。为了得到讲义上面的形式，取

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathrm{j}(z_2 - z_1) \\ x_2 &= z_1 + z_2 \end{aligned}$$

那么变换后各矩阵是

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathrm{j} & \mathrm{j} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma + \mathrm{j}\omega & 0 \\ 0 & \sigma - \mathrm{j}\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{j} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{j} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma\mathrm{j} + \omega & \sigma\mathrm{j} + \omega \\ \sigma + \mathrm{j}\omega & \sigma - \mathrm{j}\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{j} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{j} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = Pb = \begin{bmatrix} -\mathrm{j} & \mathrm{j} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = cP^{-1} = \begin{bmatrix} a - \mathrm{j}\frac{a\sigma+b}{\omega} & a + \mathrm{j}\frac{a\sigma+b}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{j} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{j} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a\sigma+b}{\omega} & a \end{bmatrix}$$

同样各矩阵都化为实矩阵。